



# Facultad de Informática

## Grado en Ingeniería Informática

### Lógica



## PARTE 2: LÓGICA DE PRIMER ORDEN

# Tema 10: Conceptos Metalógicos

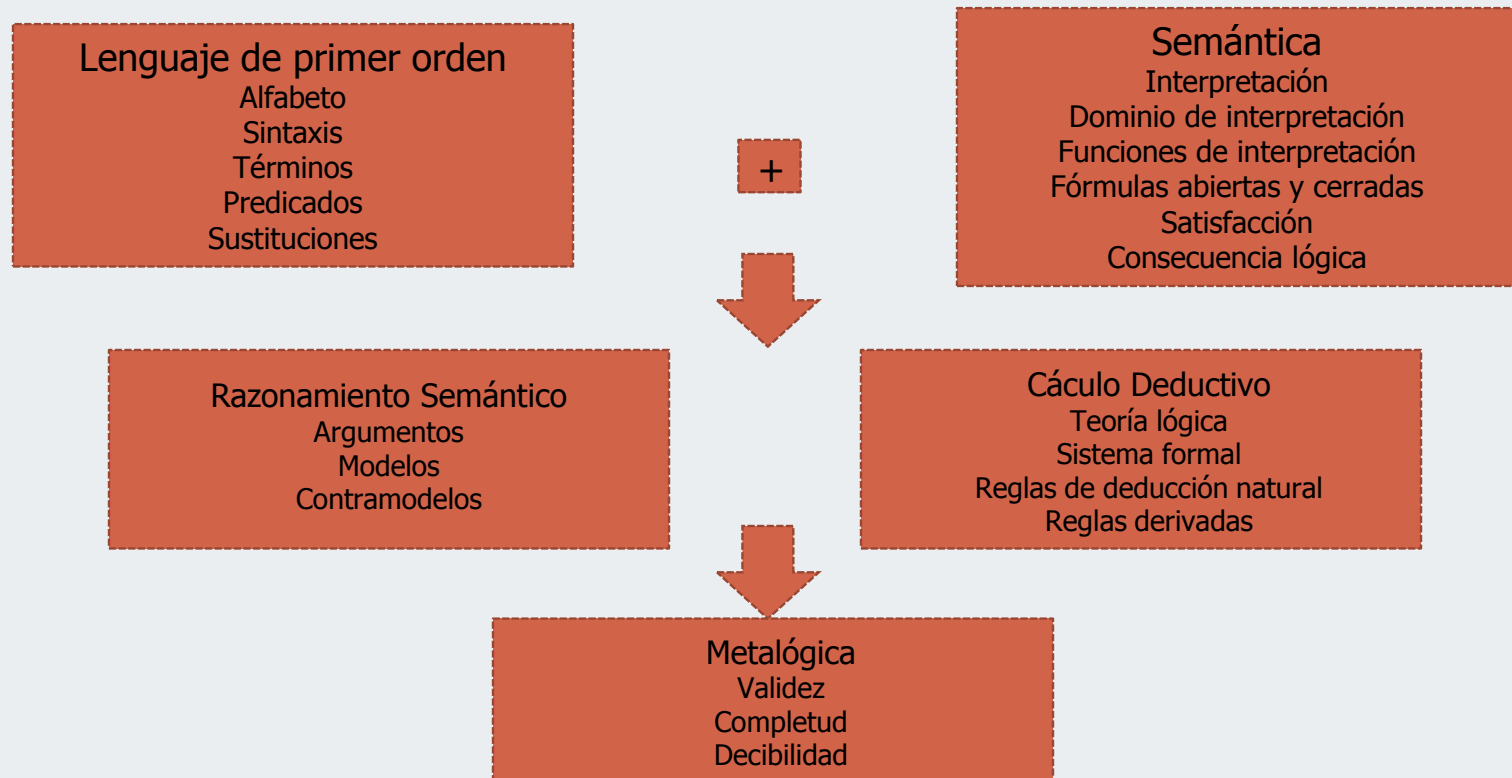
Profesor: Javier Bajo  
[jbajo@fi.upm.es](mailto:jbajo@fi.upm.es)



# Introducción a la lógica.

2

## ❑ Componentes de la lógica de primer orden





# Índice

3

- 1. Introducción.**
- 2. Propiedades formales.**
- 3. Metalógica del cálculo de predicados.**



# Introducción.

4

## ❑ ¿Qué es el razonamiento semántico?

- La **metalógica** estudia los lenguajes lógicos y desarrolla propiedades de estos sistemas, tales como completud, consistencia, decidibilidad, etc.
- Un sistema lógico tiene la propiedad de ser **consistente** cuando no es posible deducir una contradicción dentro del sistema.
- Se dice de un sistema lógico que es **decidible** cuando, para cualquier fórmula dada en el lenguaje de un sistema con axiomas y reglas de inferencia, existe un método efectivo para determinar si esa fórmula pertenece o no al conjunto de los teoremas del sistema.
- Se habla de **completitud** en varios sentidos, pero quizás los dos más importantes sean los de completitud semántica y completitud sintáctica.
- En este tema se introducen los conceptos metalógicos fundamentales en sistemas de primer orden.



# Introducción.

5

- Si afirmo **A1 y A2 y ... An**, ¿podría afirmar también **B**?
- Hemos visto **dos tipos de técnicas** para analizar la corrección de argumentaciones representadas con lenguajes formales:
  - **Análisis semántico**: Si siempre que  $A1, A2, \dots, An$  son ciertos,  $B$  también lo es, la argumentación es correcta ( $\{A1, \dots, An\} \models B$ )
  - **Cálculo deductivo**: Si partiendo de  $A1, A2, \dots, An$  como premisas puedo construir una prueba para  $B$  (usando las reglas de inferencia de la deducción natural), la argumentación es correcta ( $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ )
- Pero queda una cuestión pendiente:
  - ¿Siempre que  $\{A1, \dots, An\} \models B$  también se cumple  $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$ ?
  - ¿Siempre que  $T[A1, A2, \dots, An] \vdash B$  también se cumple  $\{A1, \dots, An\} \models B$ ?



# Propiedades formales.

6

- ❑ El análisis de la corrección de un argumento se hace siempre en un contexto o marco formal, denominado **sistema formal**. Un sistema formal establece una relación de deducibilidad (  $\vdash$  ) entre fórmulas de un lenguaje formal.
- ❑ Tiene interés estudiar diversas propiedades del sistema formal, como son:
  - **Validez**(corrección). Un sistema formal (p. ej. el cálculo de deducción natural, en adelante **T**) es válido cuando toda fórmula deducida en él es una fórmula válida:  $T \vdash A \Rightarrow \models A$ 
    - Validez proposicional: una fórmula proposicional es válida (tautológica) cuando es verdadera para toda asignación de verdad (valoración) de sus fórmulas atómicas constituyentes.
    - **Validez en LPO**: una fórmula de un LPO es válida cuando es verdadera en toda posible interpretación.
  - **Consistencia**.
    - Un sistema formal es consistente si no puede deducirse de él ninguna contradicción (e.d. fórmulas con el esquema  $A \wedge \neg A$ ).
$$T \not\vdash F \wedge \neg F \quad (F \text{ metavariable sobre fórmulas})$$

**Validez  $\Rightarrow$  Consistencia** pero sin embargo **Consistencia  $\neq$  Validez**



# Propiedades formales.

7

- **Completud**

- Un sistema formal es completo cuando toda fórmula válida puede deducirse en él:

$$| \models A \Rightarrow T | \neg A$$

- Es habitual enlazar validez y completud en un único teorema de completud:

$$| \models A \Leftrightarrow T | \neg A$$

- **Decidibilidad**

- En general, un problema es decidable sii hay un algoritmo que lo resuelve.
- En un sistema formal, hay dos problemas centrales:

- ¿  $T[\Gamma] \vdash \neg A$  ?                      ¿A es deducible?
- ¿  $T[\Gamma] \models A$  ?                      ¿A es válida?



# Metalógica del cálculo de predicados.

8

- La **Lógica Proposicional** puede sistematizarse en sistemas formales que sean:
  - Válidos, Consistentes y Completos
  - Decidibles para los problemas de validez y deducibilidad.
- La **Lógica de Primer Orden** puede sistematizarse en sistemas formales que sean:
  - Válidos, Consistentes y Completos
  - La validez y la deducibilidad sólo son decidibles si restringimos la expresividad del lenguaje y la complejidad de las fórmulas.
  - Sin restricciones, la LPO es indecidible.